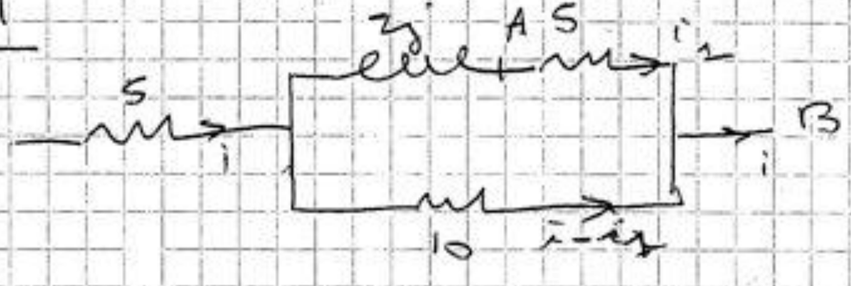
Correction des exercices
Électrocinétique III

Dans ces feuilles : $j^2 = -1$

Exercice 1



$$10(\underline{i}-\underline{i_1}) - 5\underline{i_1} - 2j\underline{i_1} = 0$$

$$10\underline{i} = (15+2j)\underline{i_1}$$

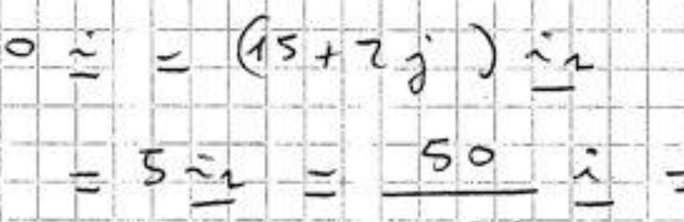
$$\underline{u_{AB}} = 5\underline{i_1} = \frac{50}{15+2j}\underline{i} = \frac{50(15-2j)}{229}\underline{i}$$

$$u_{AB}(t) = \frac{500\times 15}{229}\cos\omega t + \frac{1000}{229}\sin\omega t$$

$$= 32,8\cos\omega t + 4,37\sin\omega t$$ amplitude de $\underline{i}-\underline{i_1}$

$$= 33\cos(\omega t - 0,133)\ ;\ P = \frac{1}{2}\times 10|\underline{i}-\underline{i_1}|^2 = 63,3\,W$$

Exercice 2



$\underline{e_1} = 10e^{j\omega t}$ X

$\underline{e_2} = 10j\,e^{j\omega t}$ X

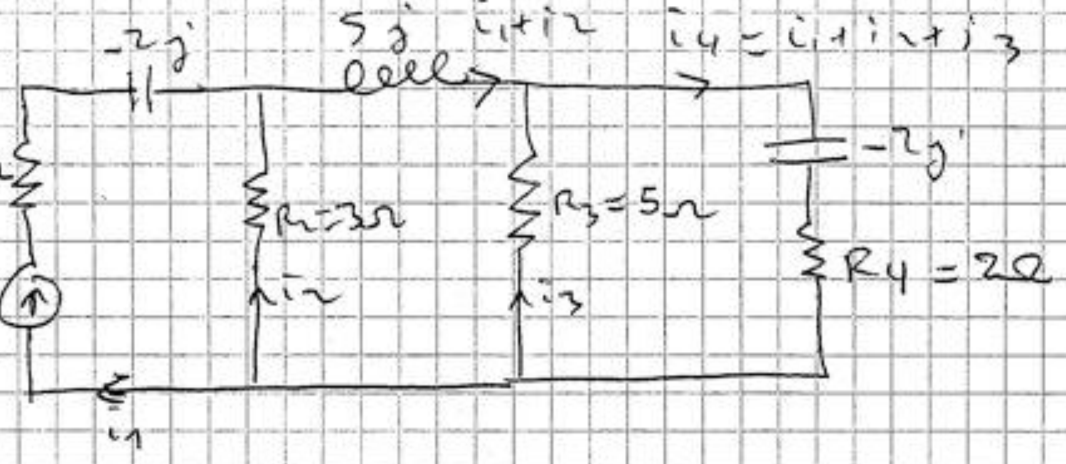
$$\underline{i} = \frac{\underline{e_2}-\underline{e_1}}{10+5j} = \frac{10}{10+5j}(-1+j)e^{j\omega t}$$

$$= \frac{2}{25}(-5+15j)e^{j\omega t}$$

$$\underline{u_{AB}} = 8\underline{i} + \underline{e_1} = (6,8+9,6j)e^{j\omega t}$$

$$u_{AB} = 6,8\cos\omega t - 9,6\sin\omega t = 11,8\cos(\omega t + 0,954)$$

Exercice 3 $\underline{e} = 70,7\, e^{j\omega t}$



$P_k = \frac{1}{2} R_k |\underline{i_k}|^2$, il faut calculer les modules des intensités.

$$\begin{cases} (5-2j)\,\underline{i_1} - \underline{e} - 3\,\underline{i_2} = 0 \\ 3\,\underline{i_2} + 5j\,(\underline{i_1} + \underline{i_2}) - 5\,\underline{i_3} = 0 \\ 5\,\underline{i_3} + (2-2j)\,(\underline{i_1} + \underline{i_2} + \underline{i_3}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-2j)\,\underline{i_1} - 3\,\underline{i_2} = \underline{e} \\ 5j\,\underline{i_1} + (3+5j)\,\underline{i_2} - 5\,\underline{i_3} = 0 \\ (2-2j)\,\underline{i_1} + (2-2j)\,\underline{i_2} + (7-2j)\,\underline{i_3} = 0. \end{cases}$$

Ce système admet comme solution

$$\underline{i_1} = (+0,142 + 0,0216\,j)\,\underline{e}$$
$$\underline{i_2} = (-0,0830 - 0,0584\,j)\,\underline{e}$$
$$\underline{i_3} = (-0,0130 + 0,0236\,j)\,\underline{e}$$

D'où $P_1 = 256\,W$; $P_2 = 77,2\,W$; $P_3 = 9,04\,W$
$P_4 = 11,3\,W$

Exercice 4

$$Z_{AB} = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{\frac{L_0}{C_0}}{jL_0\omega + \frac{1}{jC_0\omega}}$$

$$Z_{A'B'} = \frac{\left(Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}\right)\frac{1}{jC'\omega}}{Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega} + \frac{1}{C'j\omega}}$$

$Z_{AB} = Z_{A'B'} \Leftrightarrow$

$$\left[Lj\omega + \left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}\right)\frac{1}{j\omega}\right]\left[\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{L_0/C_0}{jL_0\omega + \frac{1}{jC_0\omega}}\right] = \frac{1}{jC'\omega}\left(Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \left[Lj\omega + \left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}\right)\frac{1}{j\omega}\right]\left[\frac{L_0}{C_1} - \frac{1}{C_0C_1\omega^2} + \frac{L_0}{C_0}\right] = \left(\frac{L}{C'} - \frac{1}{CC'\omega^2}\right)\left(jL_0\omega + \frac{1}{jC_0\omega}\right)$$

$$\Leftrightarrow L_0L\left(\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_1}\right)j\omega - \frac{Lj}{C_0C_1\omega} + \frac{1}{j\omega}L_0\left(\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_1}\right)\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}\right)\frac{1}{C_0C_1}\frac{1}{j\omega^3} = j\frac{LL_0\omega}{C'} + \frac{L}{jC_0C'\omega}$$
$$- \frac{jL_0}{CC'\omega} - \frac{1}{jCC'C_0\omega^3}$$

Ceci devant être valable $\forall\omega$, les termes en ω, $\frac{1}{\omega}$ et $\frac{1}{\omega^2}$ doivent s'annuler indépendamment les uns des autres :

$$LL_0\left(\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_1}\right)=\frac{LL_0}{C'} \quad (1)$$

$$\frac{L}{C_0C_1}+L_0\left(\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_1}\right)\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}\right)=\frac{L}{C_0C'}+\frac{L_0}{CC'} \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}\right)\frac{1}{C_0C_1}=\frac{1}{CC'C_0} \quad (3)$$

$$(1)\Rightarrow \frac{1}{C'}=\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_1} \quad \text{ou} \quad \boxed{C'=\frac{C_0C_1}{C_0+C_1}}$$

$$(3)\Rightarrow \frac{1}{C}+\frac{1}{C'}=\frac{C_1}{CC'}$$

$$\frac{1}{C}\left(1-\frac{C_1}{C'}\right)=\frac{-1}{C'} = \frac{1}{C}\left(1-\frac{C_1}{C_0}-1\right)=-\frac{C_1}{CC_0}$$

$$C=\frac{C_1}{C_0}\cdot\frac{C_0C_1}{C_0+C_1}, \quad \boxed{C=\frac{C_1^2}{C_0+C_1}}$$

$$(2)\Rightarrow \frac{L}{C_0}\left(\frac{1}{C'}-\frac{1}{C_1}\right)=L_0\left[\left(\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_1}\right)\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}\right)-\frac{1}{CC'}\right]$$

$$\frac{L}{C_0}\left(\frac{1}{C_0}\right) \qquad =\frac{L_0}{C'^2}$$

$$L=L_0\cdot\frac{C_0^2}{C'^2}, \quad \boxed{L=L_0\frac{(C_0+C_1)^2}{C_1^2}}$$

<u>Exercice 5</u> $Z_{eq}=R_1+\dfrac{R_3(R_2+jL\omega)}{R_3+R_2+jL\omega}$

$$=R_1+\frac{R_3}{(R_2+R_3)^2+L^2\omega^2}(R_2+jL\omega)(R_2+R_3-jL\omega)$$

$$Z_{eq}=R_1+\frac{R_3\left(R_2^2+R_2R_3+\omega^2L^2\right)}{\ldots}+\frac{jR_3^2L\omega}{\ldots}$$

Quand $L=0$: $Z_{eq} = R_{eq}$, en particulier ni dépendant de ω.

Exercice 6

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} + jC'\omega + \frac{1}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{1}{r}$$

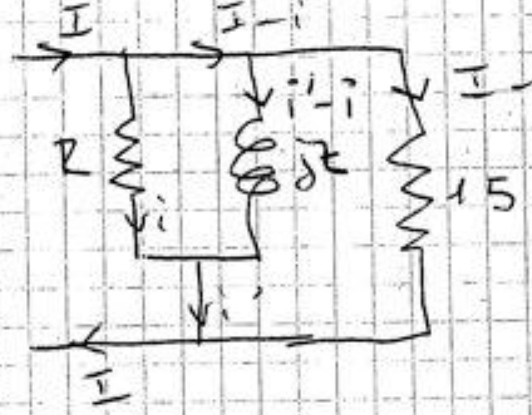
$$\operatorname{Im} \frac{1}{Z_{eq}} = 0 \Rightarrow \boxed{r = R}, \text{ valable quand}$$

$$C'\omega + \frac{1}{\frac{1}{C\omega} - L\omega} = 0 = C'\omega + \frac{C\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$C'(LC\omega^2 - 1) = C, \quad CC'L\omega^2 = C + C'$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{C+C'}{LCC'}}$$

Exercice 7



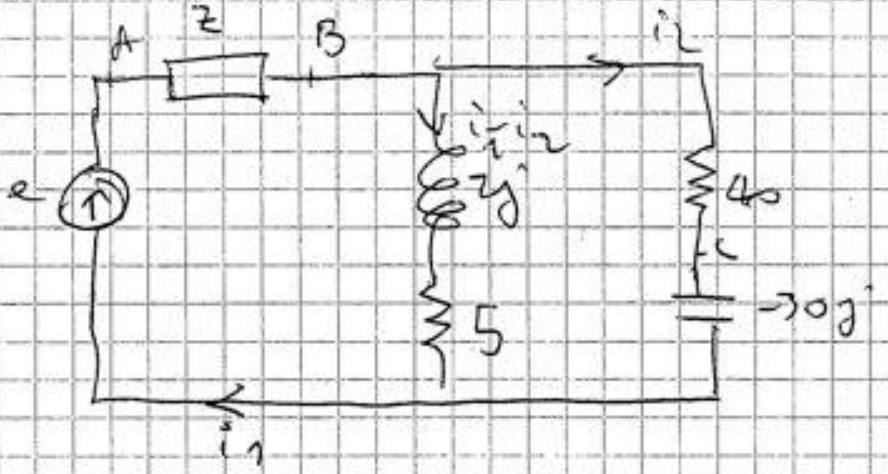
$$jZ(\underline{i}' - \underline{i}) = R\underline{i} = 15(\underline{I} - \underline{i}')$$

$$jZ\underline{i}' = (R + jZ)\underline{i}, \quad \underline{i}' = \frac{R+jZ}{jZ}\underline{i}$$

$$\left(R + 15\frac{R+jZ}{jZ}\right)\underline{i} = 15\underline{I} = \left(R + 15 + \frac{15R}{jZ}\right)\underline{i}$$

Donc
$$\begin{cases} \left|\frac{\underline{i}'}{\underline{i}}\right|^2 = \left(\frac{R}{Z}\right)^2 + 1 = \left(\frac{i'_{eff}}{i_{eff}}\right)^2 \\ \left|\frac{\underline{I}}{\underline{i}}\right|^2 = \frac{1}{15^2}\left[(R+15)^2 + \frac{15^2 R^2}{Z^2}\right] = \left(\frac{I_{eff}}{i_{eff}}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 25{,}2\,\Omega \\ Z = 9{,}7\,\Omega \end{cases}$$

Exercice 8



$$Z = 3 e^{j\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}$$

$$\begin{cases} Z\,\underline{i_1} + (5+2j)(\underline{i_1} - \underline{i_2}) = \underline{e} & (1) \\ (40-30j)\,\underline{i_2} - (5+2j)(\underline{i_1} - \underline{i_2}) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$Z\,\underline{i_1} + (40-30j)\,\underline{i_2} = \underline{e}$$

$$\underline{u_{AC}} = Z\,\underline{i_1} + 40\,\underline{i_2}$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\underline{i_1} = (0,112 - 0,0713\,j)\,\underline{e}$

$\underline{i_2} = (0,0126 + 0,00484\,j)\,\underline{e}$

$$|u_{AC}| = |Z\,i_1 + 40\,\underline{i_2}| = 0,934\,|\underline{e}|$$

$$\Rightarrow e_{ff} = 53,5\ V$$

Exercice 9

1) a) $$\begin{cases} R i + \frac{q}{C} = e \\ L\frac{di_1}{dt} + r i_1 = \frac{q}{C} \\ \frac{dq}{dt} = i - i_1 \\ v = L\frac{di_1}{dt} + r i_1 = \frac{q}{C} \end{cases}$$

$$\cancel{L\frac{d^2 i_1}{dt^2}} + \cancel{r\frac{di_1}{dt}} = \frac{i}{C} - \frac{i_1}{C}$$

$$= \frac{1}{CR}\left(e - \frac{q}{C}\right) - \frac{i_1}{C}$$

$$= \frac{e}{RC} - \cancel{\frac{i_1}{C}} - \frac{1}{RC}\left(L\frac{di_1}{dt} + r i_1\right)$$

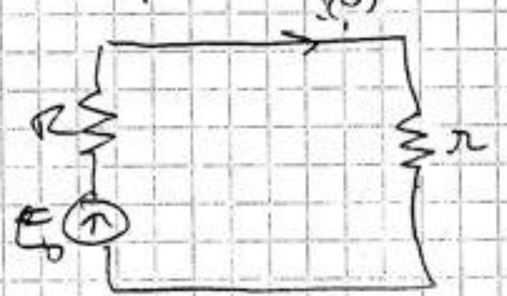
$$(E)\quad \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right) i_1 = \frac{e}{RLC}$$

(E) peut être vue comme étant la somme de

$$(E1) : \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right) i_1 = \frac{E_0}{RLC} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{R}\right) i_1 = \frac{E_0}{R}$$

$$i_1^{(0)} = \frac{E_0}{R+r}$$

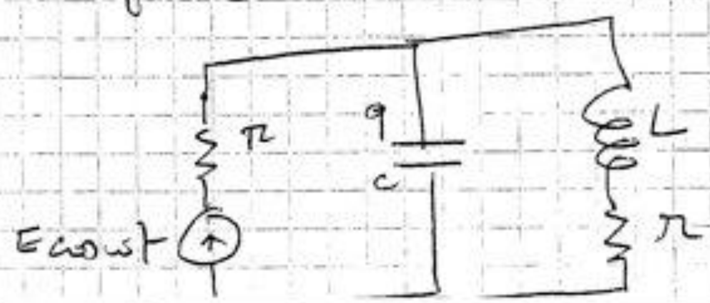
(E1) correspond au circuit en courant continu :



et de

$$(E2) : \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right) i_1 = \frac{E\cos\omega t}{RLC}$$

correspondant à un circuit en régime sinusoïdal forcé :



b) L'éq. diff satisfaite par i_1 est linéaire et la somme des solutions de (E_1) et (E_2) est donc solution de (E).

Pour résoudre (E_2) on utilise $\begin{cases} \underline{E} = E e^{j\omega t} \\ \underline{i_1} = |i_1| e^{j\omega t} \end{cases}$

$$\left[-\omega^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L} \right) j\omega + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{r}{R}\right) \right] \underline{i_1} = \frac{\underline{E}}{RLC}$$

A.N $\underline{i_1} = (0{,}0262 - 0{,}233\,j)\, e^{j\omega t}$

$= 0{,}234\, e^{j(\omega t - 1{,}46)}$ (pour E_2).

Donc

$$\boxed{i_1(t) = \underbrace{0{,}1}_{\text{solution de } (E_1)} + 0{,}234 \cos(\omega t - 1{,}46)}$$

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(e - \frac{q}{C}\right) = \frac{1}{R}\left(e - L\frac{di_1}{dt} - r i_1\right)$$

$$= \frac{E_0}{R} + \frac{E}{R}\cos\omega t - \frac{L}{R}\frac{di_1}{dt} - \frac{r}{R} i_1$$

= partie continue + partie oscillante = $\frac{E_0}{R+r} + \mathrm{Re}\,\underline{i}$

$$= \frac{E_0}{R} + \mathrm{Re}\,\underline{i} - \frac{r}{R}\frac{E_0}{r+R} = \frac{E_0}{r+R} + \mathrm{Re}\,\underline{i}$$

$$\underline{i} = \frac{1}{R}\left[\underline{E} - (Lj\omega + r)\underline{i_1}\right]$$

loi des mailles en général E et i ...

A.N $\underline{i} = 0{,}0181 - 0{,}149\,j$

$$\boxed{i(t) = 0{,}1 + 0{,}150 \cos(\omega t - 1{,}45)}$$

2) a) $E_{eff}^2 = E_0^2 + \frac{1}{2}E^2$, $I_{eff}^2 = I_0^2 + \frac{1}{2}I^2$

b) $p(t) = e(t)\,i(t)$

$= (E_0 + E\cos\omega t)(I_0 + I\cos(\omega t + \varphi))$

$= E_0 I_0 + E_0 I \cos(\omega t + \varphi) + E I_0 \cos\omega t$
$+ EI \cos\omega t \cos(\omega t + \varphi)$

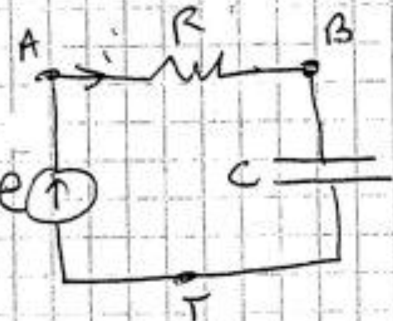
c) $P_T = E_0 I_0 + EI \langle \cos\omega t \cos(\omega t + \varphi) \rangle$

$\cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi$

$P_T = E_0 I_0 + \frac{1}{2} EI \cos\varphi$

d) $P_0 = E_0 I_0 = 0{,}1\,W$ $\quad P_T = P_0 + P = 0{,}227\,W$
$P = \frac{1}{2} EI \cos\varphi$
$= 0{,}127\,W$

Exercice 10



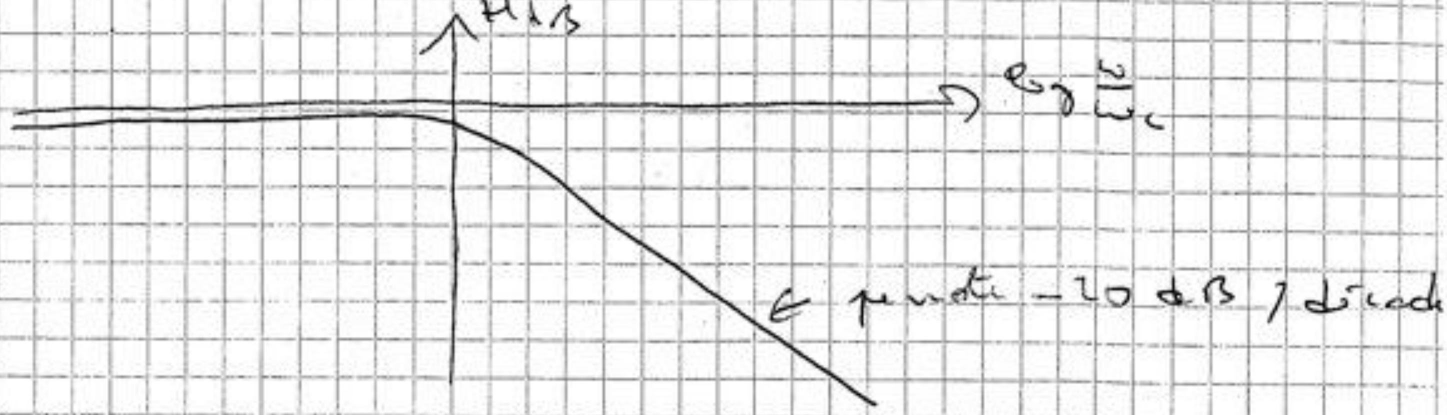
$$\frac{\underline{u_{BT}}}{\underline{u_{AT}}} = \underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + RjC\omega}$$

$$H = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

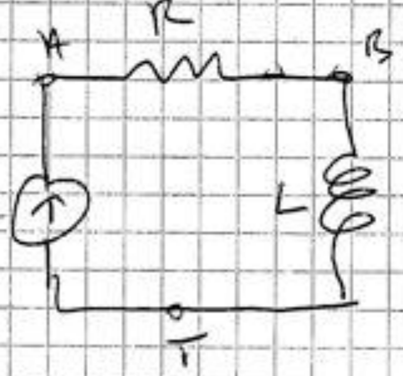
H est une fonction décroissante de ω, d'où le nom de " filtre passe-bas ". qd $\omega = \omega_c = \frac{1}{RC}$, $H = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$H_{dB} = 20 \log \sqrt{2} = -3\,dB$
on considère que le filtre " ne passe plus " lorsque la perte par rapport au gain maximal est $\geq 3\,dB$, d'où le nom de fréquence de coupure pour ω_c.

$$H_{dB} = -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

si $\omega \gg \omega_c$: $H_{dB} \simeq -20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$



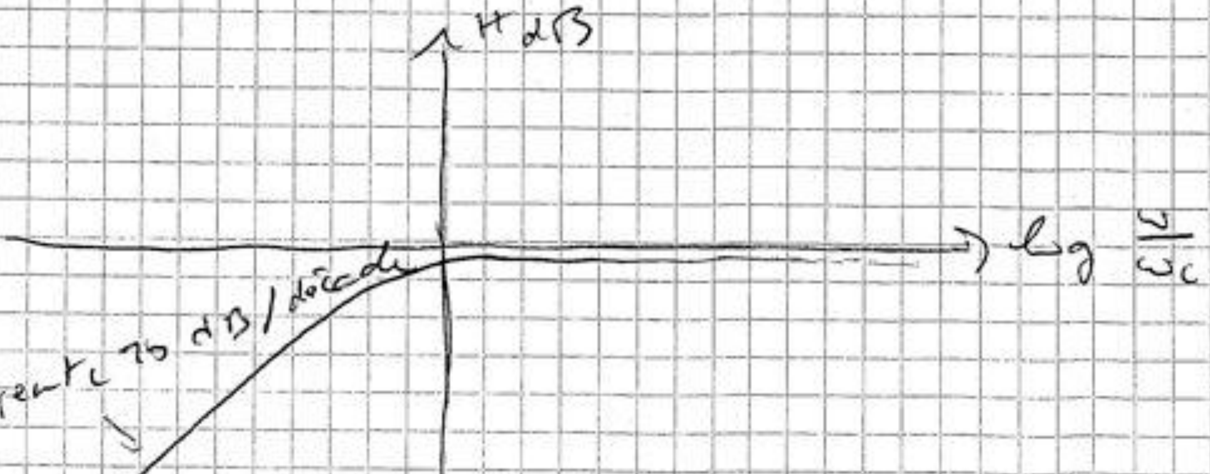
Pour obtenir un filtre "passe haut", il suffit de remplacer le condensateur par une bobine :



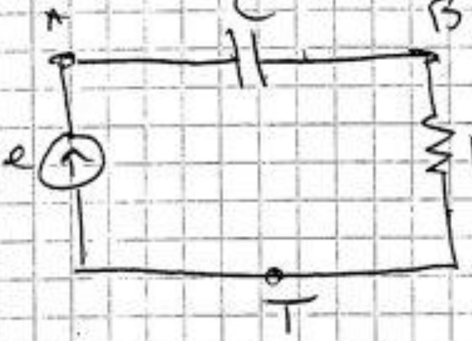
$$\underline{H} = \frac{\underline{u_{BT}}}{\underline{u_{AT}}} = \frac{Lj\omega}{R + Lj\omega}$$

$$H = |\underline{H}| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}$$

On obtient bien un filtre passe-haut de fréquence de coupure $\omega_c = \frac{R}{L}$.



Une autre manière d'obtenir un filtre "passe-haut" est d'inverser R et C dans le filtre "passe-bas" :

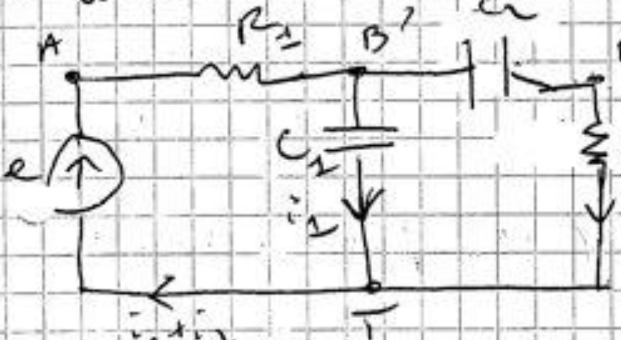


$$\underline{H} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{RjC\omega}{1 + RjC\omega}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}}$$

$$H = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2C^2\omega^2}}} \quad , \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

Pour obtenir un filtre "passe-bande" il est naturel de coupler le filtre "passe-haut" avec le filtre "passe-bas" avec 2 fréquences de coupure différentes.



$$\underline{H} = \frac{\underline{u_{BT}}}{\underline{u_{AT}}} = \frac{\underline{u_{BT}}}{\underline{u_{B'T}}} \times \frac{\underline{u_{B'T}}}{\underline{u_{AT}}}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1} > \omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$$

$$\frac{\underline{u_{BT}}}{\underline{u_{B'T}}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}} = \underline{H}_2 = \text{filtre passe-haut}$$

$$\frac{\underline{u_{B'T}}}{\underline{u_{AT}}} = \frac{\frac{\underline{i_1}}{jC_1\omega}}{R_1(\underline{i_1} + \underline{i_2}) + \frac{\underline{i_1}}{jC_1\omega}} = \frac{\underline{i_1}}{\underline{i_1} + R_1 jC_1\omega(\underline{i_1} + \underline{i_2})}$$

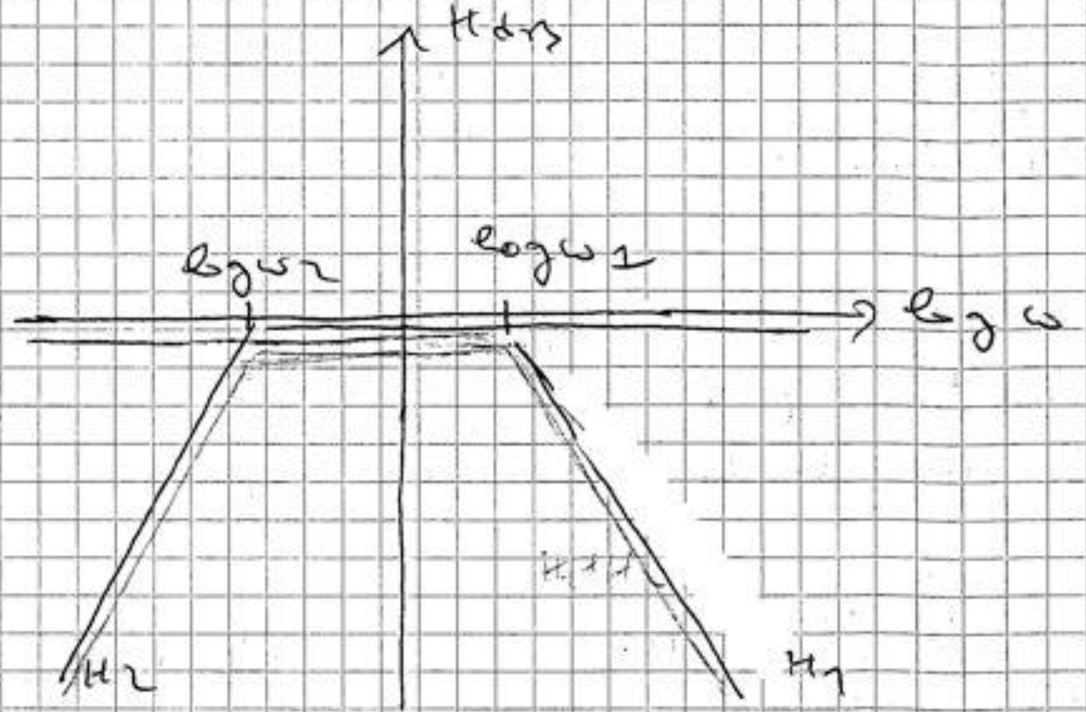
$$= \frac{1}{1 + R_1C_1j\omega + R_1C_1j\omega \frac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}}}$$

n ne obtient pas ici exactement le filtre passe-bas, car $\underline{i_2} \neq 0$.

Si $R_1 C_1 \omega \left| \frac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}} \right| \ll 1$, alors

$$\underline{H} \simeq \underset{\text{passe-bas}}{\underline{H_1}} \times \underset{\text{passe-haut}}{\underline{H_2}}$$

$$H_{dB} = H_{1,dB} + H_{2,dB}$$



ans on obtient exactement le filtre passe-bande recherché.

Regardons plus précisément la condition pour avoir un bon filtre.

$$\frac{\underline{i_1}}{jC_1\omega} = \left(R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}\right)\underline{i_2} \quad , \quad \frac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}} = \frac{1}{R_2 jC_1\omega + \frac{C_1}{C_2}}$$

Il faut donc $\dfrac{R_1 C_1 \omega}{\sqrt{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 + R_2^2 C_1^2 \omega^2}} \ll 1$

$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{\ldots} \gg 1$: on prend $\boxed{R_2 \gg R_1}$